

APRIL/MAY 2024

BMA63 — COMPLEX ANALYSIS – II



Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions

1. State Liouville's theorem.

லியோவெலிஸ் தேற்றத்தைக் கூறுக.

2. Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ என்ற தொடரின் ஒருங்குதலை சோதிக்கவும்.

3. Define Maclaurin's series.

மெக்லாரின் தொடரை வரையறு.

4. Find Laurent's series expansion of $f(z) = z^2 e^{1/z}$ about $z = 0$.

$f(z) = z^2 e^{1/z}$ க்கு $z = 0$ யை மையமாக கொண்டு லாரண்ட்ஸ் விரிவை எழுதுக.

5. Define Pole.

துருவம் வரையறு.

6. Find the residue of $\frac{(z^3 + 2z)}{(z - i)^3}$.

$\frac{(z^3 + 2z)}{(z - i)^3}$ -ன் எச்சத்தை காண்க.

7. Find the Singular point of $f(z) = \frac{1}{z}$.

$f(z) = \frac{1}{z}$ -ன் ஒருமைப் புள்ளிகளை காண்க.

8. State Rouché's theorem.

ரோஷியின் தேற்றத்தை கூறுக.

9. Define Cauchy principal value.

காசியின் முதன்மை மதிப்பை விளக்குக.

10. Find out the value of $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$ மதிப்பை காண்க.

19. Prove that $\frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(x) = N - P$ where N and P are the number of zeros and poles of f .

N மற்றும் P என்பது f -யின் பூஜ்ஜியம் மற்றும் துருவங்களின் எண்ணிக்கை எனில்

$\frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(x) = N - P$ என நிரூபி.

20. Show that $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{e}$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{e}$ எனக் காண்பி.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Let $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$) and $z = x + iy$, then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

$z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $z = x + iy$, எனில்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

என நிரூபி.

17. State and prove Laurent's theorem.

லாரன்ஸ் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

18. Evaluate $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{\sinh z} dz$ where C is the circle

$|z| = 8$ described in the positive sense.

C என்பது நேர்மறை போக்கில் லரையறுக்கப்பட்ட

வட்டம் $|z| = 8$ எனில் $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{\sinh z} dz$ மதிப்பைக்

காண்க.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) State and prove fundamental theorem of algebra.

இயற்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

Or

- (b) Show that if $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ then $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$ எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ என நிரூபி.

12. (a) Find the Taylor's series to represent

$$\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)} \text{ in } |Z| < 2.$$

$|Z| < 2$ ல் $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$ ன் டெய்லர் விரிவினை

எழுதுக.

Or

- (b) Expand $f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ as Laurent's series in $0 < |z-1| < 4$.

$0 < |z-1| < 4$ ல் $f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ ஐ லாரன்ஸ் தொடராக விரிவாக்கம் செய்க.

13. (a) Evaluate $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ where C is the circle $|z|=2$ described counter clockwise.

C என்பது இடஞ்சுழி போக்கில் வரையறுக்கப்பட்ட வட்டம் எனில் $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ மதிப்பை காண்க.

Or

- (b) Find the residue of the function $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

$\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ - ன் எச்சத்தைக் காண்க.

14. (a) Determine the number of roots of the equation $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ interior to the circle $|z|=1$.

$|z|=1$ எனும் வட்டத்தின் உட்புறம் உள்ள மூலங்களின் $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ எண்ணிக்கையைக் காண்க.

Or

- (b) State and prove Argument principle.
வீச்சுக் கோட்பாட்டை கூறி நிரூபி.

15. (a) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

Or

- (b) Show that $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{6}$.

$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{6}$ என நிரூபி.